

УДК 531.57

Т.Ю. Кучкова, С.В. Лутманов

*Пермский государственный национальный
исследовательский университет*

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
8 (342) 2-396-309

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Исследован управляемый динамический объект с тремя степенями свободы. В частности, была решена обратная задача динамики по определению программного управления, реализующего выбранный кинематический закон движения объекта. В случае малого возмущения начальных условий построено оптимальное по критерию "минимум энергии" дополнительное управление, возвращающее движение объекта на базовую траекторию.

Ключевые слова: математическая модель; линеаризованные дифференциальные уравнения; полная управляемость; оптимальное управление.

Введение

В данной работе исследуется управляемый динамический объект, имеющий три степени свободы. Исследование производится в соответствии с методикой, представленной в статье [2] и содержит следующие пункты:

- вывод дифференциальных уравнений движения управляемого динамического объекта;
- подбор базового кинематического закона движения объекта, удовлетворяющего заданным формализованным требованиям;

– решение обратной задачи динамики по нахождению программного управления, реализующего базовый закон движения объекта;

– построение линеаризованных дифференциальных уравнений управляемого движения в окрестности базового кинематического закона, описывающих динамику возмущений;

– проверка качества полученной линеаризации;

– проверка линеаризованной системы на полную управляемость;

– решение задачи оптимального управления по обнулению возмущений по критериям "минимум энергии";

– проверка качества полученных управлений для исходной нелинейной модели динамического объекта.

1. Описание модели и постановка задачи

Платформа A массы m_A движется поступательно без трения вдоль горизонтальной плоскости (см. рис. 1).

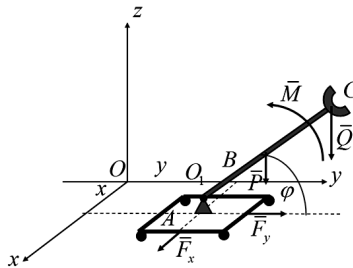


Рис. 1

На платформе установлен цилиндрический шарнир, который разрешает вращаться однородному стержню B массы m_B и длиной $2l$ в плоскости, параллельной плоскости Oyz . На конце стержня имеется точечный "схват" C массы m_C . К платформе приложены

управляющая сила $\bar{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix}$ и управляющий момент $\bar{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Заданы начальное и конечное положение схвата и его скорости:

$$x_C^0, y_C^0, z_C^0, x_C^1, y_C^1, z_C^1, \dot{x}_C^0, \dot{y}_C^0, \dot{z}_C^0, \dot{x}_C^1, \dot{y}_C^1, \dot{z}_C^1.$$

Управление объектом производится на промежутке времени $[t_0, t_1]$. В процессе перехода схвата из начального положения в конечное положение должны выполняться условия:

$$\dot{x}_C^0 = \dot{y}_C^0 = \dot{z}_C^0 = \dot{x}_C^1 = \dot{y}_C^1 = \dot{z}_C^1 = 0, z_C(t) \in (0, 2l], \varphi(t) \in [0, \pi]. (1)$$

Определение 1. Интегрируемую вектор-функцию

$$v = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ M_x \end{pmatrix} : [t_0, t_1] \rightarrow R^3$$

будем называть программным управлением динамическим объектом.

В статье решаются следующие две задачи.

Задача 1. Найти программное управление $\hat{v}(\cdot)$ объектом, переводящее схват из заданного начального положения $x_C^0, y_C^0, z_C^0, \dot{x}_C^0, \dot{y}_C^0, \dot{z}_C^0$ в конечное положение $x_C^1, y_C^1, z_C^1, \dot{x}_C^1, \dot{y}_C^1, \dot{z}_C^1$ в момент времени t_1 , удовлетворив при этом условиям (1).

Определение 2. Управление $\hat{v}(\cdot)$ будем называть базовым программным управлением. Символом

$$x_C = \hat{x}_C(t), y_C = \hat{y}_C(t), \varphi_C = \hat{\varphi}_C(t), t \in [t_0, t_1]$$

обозначим кинематический закон движения схвата, отвечающий программному управлению $\hat{v}(\cdot)$. Этот закон будем называть базовым.

Задача 2. Для малого отклонения объекта от заданных начальных условий построить дополнительное программное управление

$$u^0(\cdot) = \begin{pmatrix} u_1^0(\cdot) \\ u_2^0(\cdot) \\ u_3^0(\cdot) \end{pmatrix} : [t_0, t_1] \rightarrow R^3,$$

совмещающее кинематический закон движения объекта с базовым законом в момент времени $T \in (t_0, t_1]$, и минимизирующее при этом величину

$$I[u(\cdot)] = \min_{u(\cdot)} \left[\int_{t_0}^T u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) + u_3^2(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Решение сформулированных задач будут иллюстрироваться на следующих числовых данных

$$m_A = 10 \text{ кг}, m_B = 4 \text{ кг}, m_C = 2 \text{ кг}, l = 1 \text{ м}, \\ x_C^0 = y_C^0 = z_C^0 = 0.5 \text{ м}, x_C^1 = y_C^1 = z_C^1 = 1 \text{ м}.$$

2. Решение задачи 1

За обобщенные координаты возьмем координаты x, y, φ , где x, y – координаты центра платформы, а φ – угол поворота стержня. Через обобщенные координаты выражаются декартовы координаты точек O, G, C :

$$\begin{aligned} x_{O_1} &= x, y_{O_1} = y, z_{O_1} = z, \\ x_G &= x, y_G = y + l \cos \varphi, z_G = l \sin \varphi, \\ x_C &= x, y_C = y + 2l \cos \varphi, z_C = 2l \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.1)$$

и их скорости:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{O_1} &= \dot{x}, \dot{y}_{O_1} = \dot{y}, \dot{z}_{O_1} = \dot{z}, \\ x_G &= x, \dot{y}_G = \dot{y} - l\dot{\varphi} \sin \varphi, \dot{z}_G = l\dot{\varphi} \cos \varphi, \\ x_C &= x, \dot{y}_C = \dot{y} - l\dot{\varphi} \sin \varphi, \dot{z}_C = l\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Обобщенные силы и кинетическая энергия тела, выраженная через обобщенные координаты, здесь имеют вид

$$\begin{aligned} Q_x &= F_x, \quad Q_y = F_y, \quad Q_\varphi = 2m_C gl \cos \varphi - m_B gl \cos \varphi + M_x, \\ T &= \frac{1}{6} \left[4l^2 (m_B + 3m_C) \dot{\varphi}^2 - 6l (m_B + 2m_C) \sin \varphi \dot{\varphi} \dot{y} + \right. \\ &\quad \left. + 3(m_A + m_B + m_C) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right]. \end{aligned}$$

Составим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{aligned} (m_A + m_B + m_C) \ddot{x} &= F_x, \\ -l(m_B + 2m_C) \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - 2l(m_B + 2m_C) \sin \varphi \ddot{\varphi} + (m_A + m_B + m_C) \ddot{y} &= F_y, \quad (2.3) \\ \frac{1}{3} l [4l(m_B + 3m_C) \ddot{\varphi} - 3(m_B + 2m_C) \sin \varphi \dot{\varphi}^2] &= \\ &= M_x - glm_B \cos \varphi - 2glm_C \cos \varphi \end{aligned}$$

и разрешим их относительно старших производных:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{F_x}{m_A + m_B + m_C}, \\ \ddot{y} &= \frac{3(m_B + 2m_C) [-M_x + gl(m_B + 2m_C) \cos \varphi] \sin \varphi}{l [4(m_A + m_B + m_C)(m_B + 3m_C) - 3(m_B + 2m_C)^2 \cos 2\varphi]} + \\ &+ \frac{4l^2(m_B + 3m_C) [F_y + l(m_B + 2m_C) \cos \varphi \dot{\varphi}^2]}{l [4(m_A + m_B + m_C)(m_B + 3m_C) - 3(m_B + 2m_C)^2 \cos 2\varphi]}, \\ \ddot{\varphi} &= \frac{6M_x(m_A + m_B + m_C) - 6gl(m_A + m_B + m_C)(m_B + 2m_C) \cos \varphi}{l^2 [5m_B^2 + 20m_B m_C + 12m_C^2 + 8m_A(m_B + 3m_C) + 3(m_B + 2m_C)^2 \cos 2\varphi]} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f_1(F_x), \\ \ddot{y} &= f_2(\varphi, \dot{\varphi}, F_y, M_x), \\ \ddot{\varphi} &= f_3(\varphi, \dot{\varphi}, F_y, M_x). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Согласно формулам (2.1) и (2.2) набор обобщенных координат и их скоростей $\hat{x}_O, \hat{y}_O, \hat{\varphi}_O, \dot{\hat{x}}_O, \dot{\hat{y}}_O, \dot{\hat{\varphi}}_O$, отвечающий начальному положению "схвата", определяется из системы уравнений

$$\begin{aligned} x_C^0 &= \hat{x}_O, & \dot{x}_C^0 &= \dot{\hat{x}}_O, \\ y_C^0 &= \hat{y}_O + 2l \cos \hat{\varphi}_0, & \dot{y}_C^0 &= \dot{\hat{y}}_O - 2l \sin \hat{\varphi}_0 \dot{\hat{\varphi}}_0, \\ z_C^0 &= 2l \sin \hat{\varphi}_0 & \dot{z}_C^0 &= 2l \cos \hat{\varphi}_0 \dot{\hat{\varphi}}_0 \end{aligned}$$

Закон

$$x = \hat{x}(t), y = \hat{y}(t), \varphi = \hat{\varphi}(t), t \in [t_0, t_1]$$

будем искать в виде полиномов третьей степени

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= a_{3x}t^3 + a_{2x}t^2 + a_{1x}t + a_{0x}, \\ \hat{y}(t) &= a_{3y}t^3 + a_{2y}t^2 + a_{1y}t + a_{0y}, \\ \hat{\varphi}(t) &= a_{3\varphi}t^3 + a_{2\varphi}t^2 + a_{1\varphi}t + a_{0\varphi}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Коэффициенты $a_{3x}, a_{2x}, a_{1x}, a_{0x}, a_{3y}, a_{2y}, a_{1y}, a_{0y}, a_{3\varphi}, a_{2\varphi}, a_{1\varphi}, a_{0\varphi}$ определяются как решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}a_{3x}t_0^3 + a_{2x}t_0^2 + a_{1x}t_0 + a_{0x} &= \hat{x}_0, & a_{3x}t_1^3 + a_{2x}t_1^2 + a_{1x}t_1 + a_{0x} &= \hat{x}_1, \\ a_{3y}t_0^3 + a_{2y}t_0^2 + a_{1y}t_0 + a_{0y} &= \hat{y}_0, & a_{3y}t_1^3 + a_{2y}t_1^2 + a_{1y}t_1 + a_{0y} &= \hat{y}_1, \\ a_{3\varphi}t_0^3 + a_{2\varphi}t_0^2 + a_{1\varphi}t_0 + a_{0\varphi} &= \hat{\varphi}_0, & a_{3\varphi}t_1^3 + a_{2\varphi}t_1^2 + a_{1\varphi}t_1 + a_{0\varphi} &= \hat{\varphi}_1, \\ 3a_{3x}t_0^2 + 2a_{2x}t_0 + a_{1x} &= \dot{\hat{x}}_0, & 3a_{3x}t_1^2 + 2a_{2x}t_1 + a_{1x} &= \dot{\hat{x}}_1, \\ 3a_{3y}t_0^2 + 2a_{2y}t_0 + a_{1y} &= \dot{\hat{y}}_0, & 3a_{3y}t_1^2 + 2a_{2y}t_1 + a_{1y} &= \dot{\hat{y}}_1, \\ 3a_{3\varphi}t_0^2 + 2a_{2\varphi}t_0 + a_{1\varphi} &= \dot{\hat{\varphi}}_0, & 3a_{3\varphi}t_1^2 + 2a_{2\varphi}t_1 + a_{1\varphi} &= \dot{\hat{\varphi}}_1,\end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения объекта (2.3) разрешим относительно управлений F_x, F_y, M_x :

$$\begin{aligned}F_x &= (m_A + m_B + m_C) \ddot{x}, \\ F_y &= -l(m_B + 2m_C) \cos \varphi \ddot{\varphi}^2 - 2l(m_B + 2m_C) \sin \varphi \ddot{\varphi} + (m_A + m_B + m_C) \ddot{y}, \\ M_x &= \frac{1}{3}l[4l(m_B + 3m_C) \ddot{\varphi} - 3(m_B + 2m_C) \sin \varphi \ddot{y}] + \\ &\quad + glm_B \cos \varphi + 2glm_C \cos \varphi.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Управления $\hat{F}_x, \hat{F}_y, \hat{M}_x$, решающие задачу 1, получим, подставив (2.5) в (2.6)

$$\begin{aligned}\hat{F}_x &= (m_A + m_B + m_C) \ddot{\hat{x}}, \\ \hat{F}_y &= -l(m_B + 2m_C) \cos \hat{\varphi} \dot{\hat{\varphi}}^2 - 2l(m_B + 2m_C) \sin \hat{\varphi} \ddot{\hat{\varphi}} + (m_A + m_B + m_C) \ddot{\hat{y}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{M}_x = \frac{1}{3}l \Big[4l(m_B + 3m_C)\ddot{\hat{\phi}} - 3(m_B + 2m_C)\sin\hat{\phi}\ddot{\hat{y}} \Big] + \\ + glm_B \cos\hat{\phi} + 2glm_C \cos\hat{\phi}.\end{aligned}$$

3. Решение задачи 2

Под возмущенным движением динамического объекта будем понимать такое его движение, для которого управляющие воздействия на объект совпадают с базовыми управлениями, а начальные условия мало отличаются от начальных условий базового движения.

Начальным декартовым координатам схвата дадим малые возмущения

$$\delta x_{Cvoz}, \delta y_{Cvoz}, \delta z_{Cvoz}, \quad \delta \dot{x}_{Cvoz} = 0, \delta \dot{y}_{Cvoz} = 0, \delta \dot{z}_{Cvoz} = 0.$$

В результате возмущенные начальные декартовые координаты схвата принимают вид

$$\begin{aligned}x_{Cvoz}^0 = x_C^0 + \delta x_{Cvoz}^0, y_{Cvoz}^0 = y_C^0 + \delta y_{Cvoz}^0, z_{Cvoz}^0 = z_C^0 + \delta z_{Cvoz}^0, \\ \dot{x}_{Cvoz}^0 = 0, \dot{y}_{Cvoz}^0 = 0, \dot{z}_{Cvoz}^0 = 0\end{aligned}$$

Возмущенные начальные значения обобщенных координат $x_{voz}^0, y_{voz}^0, \varphi_{voz}^0$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned}x_{Cvoz}^0 &= x_{voz}^0, \\ y_{Cvoz}^0 &= y_{voz}^0 + 2l \cos \varphi_{voz}^0, \\ z_{Cvoz}^0 &= 2l \sin \varphi_{voz}^0\end{aligned}\tag{3.1}$$

Проинтегрируем дифференциальные уравнения (2.4) с возмущенными начальными условиями (3.1) и скоростями $\dot{x}_{voz}^0 = 0, \dot{y}_{voz}^0 = 0, \dot{\varphi}_{voz}^0 = 0$. В результате получится закон возмущенного движения в обобщенных координат

$$x = x_{voz}(t), y = y_{voz}(t), \varphi = \varphi_{voz}(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Подставив его в формулы (2.1), получим закон движения схвата в декартовых координатах:

$$\begin{aligned}x_{Cvoz}(t) &= x_{voz}(t), y_{Cvoz}(t) = y_{voz}(t) + 2l \cos \varphi_{voz}(t), \\ z_{Cvoz}(t) &= 2l \sin \varphi_{voz}(t), \quad t \in [t_0, t_1].\end{aligned}$$

Легко видеть, что базовый и возмущенный закон движения в обобщенных координатах не совпадают. Следовательно, не совпадают базовый и возмущенный законы движения схвата в декартовых координатах.

Под возмущением базового закона движения динамического объекта в обобщенных координатах будем понимать функции

$$\begin{aligned}\delta x_{voz}(t) &= x_{voz}(t) - \hat{x}(t), \quad \delta y_{voz}(t) = y_{voz}(t) - \hat{y}(t), \\ \delta \varphi_{voz}(t) &= \varphi_{voz}(t) - \hat{\varphi}(t), \quad t \in [t_0, t_1].\end{aligned}\quad (3.2)$$

В уравнениях движения (2.4) введем дополнительные управления u_1, u_2, u_3 . В результате получим:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= f_1(F_x + u_1), \\ \ddot{y} &= f_2(\varphi, \dot{\varphi}, F_y + u_2, M_x + u_3), \\ \ddot{\varphi} &= f_3(\varphi, \dot{\varphi}, F_y + u_2, M_x + u_3).\end{aligned}\quad (3.3)$$

С помощью дополнительных управлений можно оказывать влияние на динамику возмущений, которая достаточно точно описывается линеаризованными в окрестности пары "базовое управление, базовое движение" дифференциальными уравнениями (3.3).

Опишем процедуру линеаризации уравнений (3.3). Сначала нормализуем их заменой

$p_1 = x, p_2 = y, p_3 = \varphi, p_4 = \dot{x}, p_5 = \dot{y}, p_6 = \dot{\varphi}, v_1 = F_x, v_2 = F_y, v_3 = M_x$, т.е. приведем их к виду:

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= p_4, \quad \dot{p}_4 = f_1(v_1 + u_1) \\ \dot{p}_2 &= p_5, \quad \dot{p}_5 = f_2(p_3, p_6, v_2 + u_2, v_3 + u_3), \\ \dot{p}_3 &= p_6, \quad \dot{p}_6 = f_3(p_3, p_6, v_2 + u_2, v_3 + u_3),\end{aligned}\quad (3.4)$$

Базовые законы изменения новых координат и управлений записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{p}_1(t) &= \hat{x}(t), \hat{p}_2(t) = \hat{y}(t), \hat{p}_3(t) = \hat{\varphi}(t), \hat{p}_4(t) = \dot{\hat{x}}(t), \\ \hat{p}_5(t) &= \dot{\hat{y}}(t), \hat{p}_6(t) = \dot{\hat{\varphi}}(t),\end{aligned}$$

$$\hat{v}_1(t) = \hat{F}_x(t), \hat{v}_2(t) = \hat{F}_y(t), \hat{v}_3(t) = \hat{M}_x(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Выпишем линеаризованные уравнения (3.4)

$$\dot{q} = A(t)q + B(t)u, \quad (3.5)$$

где

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial p_3} & 0 & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial p_6} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial p_3} & 0 & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial p_6} \end{pmatrix}_{\substack{p=\hat{p}(t), \\ v=\hat{v}(t)}},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial v_2} & \frac{\partial f_2}{\partial v_3} \\ 0 & \frac{\partial f_3}{\partial v_2} & \frac{\partial f_3}{\partial v_3} \end{pmatrix}_{\substack{p=\hat{p}(t), \\ v=\hat{v}(t)}}.$$

Линеаризованные уравнения будем трактовать как дифференциальные уравнения движения некоторого вспомогательного управляемого динамического объекта (линейного) на промежутке времени $[t_0, T] \subset [t_0, t_1)$, в котором управлениями служат дополнительные управления в исходной (нелинейной) модели.

Следуя монографии [1], проверим этот объект на полную управляемость.

Достаточно доказать, что матрица $K(t) = (L_1(t), \dots, L_n(t))$,

где

$$L_1(t) = B(t), L_2(t) = A(t)L_1(t) - \frac{d}{dt}L_1(t), \dots,$$

$$L_n(t) = A(t)L_{n-1}(t) - \frac{d}{dt}L_{n-1}(t)$$

имеет ранг n хотя бы при одном $t \in [t_0, T]$. В численном эксперименте при $T = \frac{1}{2}t_1$ указанный факт был установлен.

Заметим, что если, начиная с некоторого момента времени, возмущения по всем обобщенным координатам обратятся в ноль, то с этого момента возмущенный закон движения будет совпадать с базовым законом.

Опираясь на доказанную полную управляемость линейного динамического объекта (3.5), поставим и решим следующую задачу оптимального управления.

Задача. Определить программные управления $\tilde{u}_1^0(\cdot), \tilde{u}_2^0(\cdot), \tilde{u}_3^0(\cdot)$, переводящие фазовый вектор динамического объекта (3.5) из начального положения

$$q_1^0 = \delta x_{voz}(t_0), q_2^0 = \delta y_{voz}(t_0), q_3^0 = \delta \varphi_{voz}(t_0),$$

$$q_4^0 = 0, q_5^0 = 0, q_6^0 = 0 \quad (3.6)$$

в начало координат в конечный момент времени, т. е.

$$q_1(T) = 0, q_2(T) = 0, q_3(T) = 0, q_4(T) = 0, q_5(T) = 0, q_6(T) = 0,$$

и при этом удовлетворяющие равенству

$$\left[\int_{t_0}^T \left(\left(\tilde{u}_1^0(\tau) \right)^2 + \left(\tilde{u}_2^0(\tau) \right)^2 + \left(\tilde{u}_3^0(\tau) \right)^2 \right) d\tau \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \min_{u(\cdot)} \left[\int_{t_0}^T \left(u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) + u_3^2(\tau) \right) d\tau \right]^{\frac{1}{2}},$$

где минимум берется по всем программным управлениям, для которых выполнено условие (3.6).

Решение поставленной задачи производится методом максимина Н.Н. Красовского [1], основанным на сведении задачи теории оптимального управления к функциональной проблеме моментов. На базе управлений $\tilde{u}_1^0(t), \tilde{u}_2^0(t), \tilde{u}_3^0(t), t \in [t_0, T]$, строятся оптимальные управления

$$u_1^0(t), u_2^0(t), u_3^0(t), t \in [t_0, t_1],$$

решающие задачу 2 по формуле

$$u_i^0(t) = \begin{cases} \tilde{u}_i^0(t), & t \in [t_0, T], \\ 0, & t \in (T, t_1] \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для иллюстрации последнего утверждения подставим управления $u_1^0(t), u_2^0(t), u_3^0(t), t \in [t_0, t_1]$ в исходные дифференциальные (нелинейные) уравнения движения объекта (3.3)

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f_1(F_x + u_1^0), \\ \ddot{y} &= f_2(\varphi, \dot{\varphi}, F_y + u_2^0, M_x + u_3^0), \\ \ddot{\varphi} &= f_3(\varphi, \dot{\varphi}, F_y + u_2^0, M_x + u_3^0) \end{aligned} \quad (3.7)$$

и проинтегрируем их с возмущенными начальными условиями

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_{\text{voz}}(t_0), y(t_0) = y_{\text{voz}}(t_0), \varphi(t_0) = \varphi_{\text{voz}}(t_0), \\ \dot{x}(t_0) &= 0, \dot{y}(t_0) = 0, \dot{\varphi}(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Начиная с момента времени $T \in (t_0, t_1)$, решение системы дифференциальных уравнений (3.7) должно мало отличаться от базового закона движения. Этот факт можно видеть на графиках, представленных на рис. 2–4.

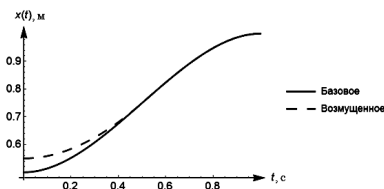


Рис. 2

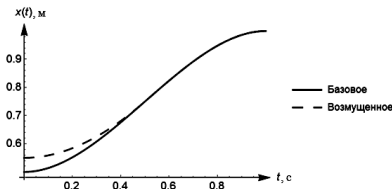


Рис. 3

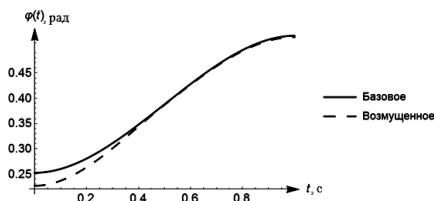


Рис. 4

Заключение

1. В работе построена математическая модель управляемого динамического объекта с тремя степенями свободы

2. Подобран кинематический закон движения объекта (базовый), удовлетворяющий заданным требованиям.

3. Решена обратная задача динамики по построению программного (базового) управления объектом, реализующего указанный кинематический закон движения.

4. Проведена линеаризация уравнений управляемого движения в окрестности базовой пары "управление – движение".

5. Установлена полная управляемость линеаризованной модели.

6. Решена вспомогательная задача оптимального управления линеаризованной моделью о переводе ее фазового вектора в начало координат.

7. Показано, что на базе решения задачи оптимального управления линеаризованной моделью эффективно решается задача о возвращении возмущенного движения исходной (нелинейной) модели на базовую траекторию.

Библиографический список

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

2. Лутманов С.В. Об одной методике исследования управляемой динамической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1(36). С. 13–20.